CHAPITRE M : FONCTIONS CONVEXES

HEI 2 - 2015/2016 - A. RIDARD

Prérequis :

- Calcul vectoriel
- Fonctions d'une variable réelle

I. Parties convexes d'un $\mathbb{R}$-ev

Dans cette section, E désigne un $\mathbb{R}$-ev muni de sa structure affine naturelle, autrement dit les éléments de E, qui sont des vecteurs, sont vus comme des points.

Exemple. Dans $E = \mathbb{R}^2$, le vecteur $(1,2)$ de coordonnées 1 et 2 dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$ désigne aussi le point de coordonnées 1 et 2 dans le repère canonique $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Notation. Si x et y sont des éléments de E, on note $\overrightarrow{xy} = y - x$.

Exemple. Dans $E = \mathbb{R}^2$, si $A = (1,2)$ et $B = (3,5)$, alors $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,3)$.

1. Barycentre

On considère un entier $n \geq 2$, une famille $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ de points de E et une famille $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ de réels.
On dit que la famille $\big((a_i, \lambda_i)\big)_{1\leq i\leq n}$ est un **système de points pondérés** de E.

Propriété.

Soit m un point de E.
Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, alors le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{ma_i}$ est indépendant du point m.

Définition (Barycentre)**.**

Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, alors le point g défini par $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{ga_i} = \vec{0}$ est appelé le barycentre du système $\big((a_i, \lambda_i)\big)_{1\leq i\leq n}$.
On note $g = Bar\big((a_i, \lambda_i)\big)_{1\leq i\leq n}$.

Remarque. En notation affine, on a : $g = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$

Exemples. Déterminer le barycentre lorsqu'il existe.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $\big((a_1, -2), (a_2, -1), (a_3, 3)\big)$ avec $a_1 = (0,1)$, $a_2 = (3,4)$ et $a_3 = (2,-2)$
2. $E = \mathbb{R}^2$ et $\big((a_1, -2), (a_2, 1), (a_3, 3), (a_4, 5)\big)$ avec $a_1 = (0,1)$, $a_2 = (3,4)$, $a_3 = (-3,0)$ et $a_4 = (2,-2)$

Définition (Isobarycentre)**.**

Si pour tout i, $\lambda_i = \lambda \neq 0$, $g = Bar\big((a_i, \lambda)\big)_{1\leq i\leq n}$ est appelé l'isobarycentre du système.

Remarque. Si $\lambda \neq 0$, alors $Bar\big((a_i, \lambda)\big)_{1\leq i\leq n} = Bar\big((a_i, 1)\big)_{1\leq i\leq n}$

Exemples. Que représente géométriquement l'isobarycentre ?

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $\big((a_1, 2), (a_2, 2)\big)$ avec $a_1 = (1,0)$ et $a_2 = (1,4)$
2. $E = \mathbb{R}^2$ et $\big((a_1, 1), (a_2, 1), (a_3, 1)\big)$ avec $a_1 = (0,0)$, $a_2 = (4,0)$ et $a_3 = (3,2)$

Propriété (Caractérisation vectorielle)**.**

Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, alors on a : $g = Bar\big((a_i,\lambda_i)\big)_{1\leq i\leq n} \iff \forall m \in E,\ \overrightarrow{mg} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{ma_i}$

Propriété (Associativité)**.**

On suppose que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$ et on note $g = Bar\big((a_i,\lambda_i)\big)_{1\leq i\leq n}$.
On considère une partition [a] (I_1, I_2) de $I = [\![1,n]\!]$ telle que $\sum_{i\in I_1} \lambda_i \neq 0$ et $\sum_{i\in I_2} \lambda_i \neq 0$.
On note enfin $g_1 = Bar\big((a_i,\lambda_i)\big)_{i\in I_1}$ et $g_2 = Bar\big((a_i,\lambda_i)\big)_{i\in I_2}$.

Alors $g = Bar\big((g_1,\alpha_1),(g_2,\alpha_2)\big)$ avec $\alpha_k = \sum_{i\in I_k} \lambda_i$ pour $k \in \{1,2\}$.

a. $I_1 \cup I_2 = I$ et $I_1 \cap I_2 = \emptyset$

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et g l'isobarycentre de $\big((a_1,1),(a_2,1),(a_3,1)\big)$ avec $a_1 = (0,0)$, $a_2 = (4,0)$ et $a_3 = (3,2)$.
Montrer que $g = \frac{1}{3}(a_1 + 2m)$ avec m le milieu du segment $[a_2, a_3]$.

2. Partie convexe

Définition (Segment)**.**

Soit $(a,b) \in E^2$.
On appelle segment d'extrémités a et b, noté $[a,b]$, l'ensemble des barycentres du système $\big((a,\lambda),(b,\mu)\big)$ avec $\lambda+\mu \neq 0$, $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$.

Remarque. $[a,b] = \left\{\frac{1}{\lambda+\mu}(\lambda a + \mu b) \mid \lambda+\mu\neq 0,\ \lambda\geq 0,\ \mu \geq 0\right\} = \big\{\lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in [0,1]\big\} = \big\{m \in E \mid \exists \lambda \in [0,1],\ m = \lambda a + (1-\lambda) b\big\}$

Définition (Partie convexe)**.**

Soit A une partie non vide de E.
On dit que A est convexe si pour tout $(a,b) \in A^2$, $[a,b] \subset A$.

Exemples. Représenter une partie convexe et une partie non convexe de $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Une partie de E est convexe si et seulement si elle est stable par "barycentration" positive.

II. Fonctions convexes d'une variable réelle

Dans cette section, f désigne une fonction réelle définie sur un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$, et sa courbe représentative dans un repère du plan est notée $\mathscr{C}$.

1. Définition

Définition (fonction convexe/concave)**.**

1. On dit que f est convexe sur I si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a :

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

2. On dit que f est concave sur I si $-f$ est convexe sur I.

Interprétation graphique.

Propriété (Inégalité de Jensen)**.**

Soit f une fonction convexe sur I, $n \geq 2$ un entier, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in]0,1[^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.
Alors, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

2. Caractérisations

a. Caractérisation géométrique

Définition (Epigraphe)**.**

On appelle épigraphe de f, noté $Ep(f)$, l'ensemble défini par :

$$Ep(f) = \big\{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\big\}$$

Propriété (Caractérisation géométrique)**.**

La fonction f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Exemples. Représenter une fonction convexe et une fonction non convexe sur $[0,10]$.

b. Caractérisation analytique

Propriété (Caractérisation analytique)**.**

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I
2. Pour tout $(x_1, x_2, x) \in I^3$, $\left(x_1 \leq x \leq x_2 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\right)$
3. Pour tout $a \in I$, la fonction $p_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$

Exemple.
Soit f une fonction convexe, croissante et non constante sur $]0,+\infty[$.
On considère la fonction $p : x \mapsto \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

1. Montrer qu'il existe $a \in]0,+\infty[$ tel que $p(a) > 0$.
2. Montrer que pour tout $x > \max(1,a)$, $f(x) \geq (x-1)p(a) + f(1)$.
3. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Propriété (Régularité d'une fonction convexe)**.**

Soit f une fonction convexe sur I et $a \in \mathring{I}$ (a est à "l'intérieur" de I). Alors,

1. f est dérivable à gauche et à droite en a, et pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, on a :

$$x_1 \leq a \leq x_2 \Rightarrow p_a(x_1) \leq f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq p_a(x_2)$$

2. f est continue sur $\mathring{I}$

c. Cas des fonctions dérivables

Propriété (Caractérisation de la convexité pour une fonction dérivable)**.**

Soit f une fonction **dérivable** sur I. Alors,
f est convexe sur $I \iff f'$ est croissante sur $I \iff \mathscr{C}$ est au dessus de toutes ses tangentes.

Propriété (Caractérisation de la convexité pour une fonction deux fois dérivable)**.**

Soit f une fonction **deux fois dérivable** sur I. Alors,
f est convexe sur $I \iff f''$ est positive sur I.

Exemple. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.